

ABORDAGEM CONCEITUAL SOBRE PARTÍCULA SOB FORÇA CENTRAL

CONCEPTUAL APPROACH TO PARTICLE UNDER CENTRAL FORCE

Thiago Ferreira da Cunha¹, Lauriane Gomes Santin²

¹Docente Engenharia Mecânica/FACEG Email: thiagofc88@hotmail.com

²Docente Engenharia Mecânica /FACEG Email: lauriane_santin@hotmail.com

Resumo: Na primeira parte deste trabalho são elucidados conceitos importantes sobre o movimento da partícula sob a ação de forças centrais, características desse movimento, bem como é exposta uma abordagem matemática introdutória. Na segunda parte são discutidas algumas aplicações e utilizações desses conceitos no âmbito acadêmico e profissional. Discutem-se aplicações em Engenharia, Astronomia e Física, Biologia e Medicina, desde características em escala macroscópica, até aspectos da matéria em escala atômica e molecular.

Palavras-chaves: Força centrípeta, Momento angular, Movimento Circular.

Abstract: In the first part of this work, important concepts about the movement of the particle under the action of central forces, characteristics of this movement, are elucidated, as well as an introductory mathematical approach is exposed. In the second part, some applications and uses of these concepts in the academic and professional scope are discussed. Applications in Engineering, Astronomy and Physics, Biology and Medicine are discussed, from characteristics on a macroscopic scale, to aspects of matter on an atomic and molecular scale.

Keywords: Centripetal force, Angular momentum, Circular motion.

INTRODUÇÃO

O estudo envolvendo forças centrais, bem como o campo envolvido, gera interesse dos estudiosos a muitos séculos devido as suas peculiaridades sobre grandes áreas da Física, eletromagnetismo, gravitação e rotação, por exemplo^{1,2,3}. Trata-se de como a interação entre partículas pode ser mais bem descrita ao analisar o movimento por forças centrais^{4,5}. Abordaremos neste texto as características que geram tal particularidade do movimento por atuação das forças centrais, bem como sua aplicabilidade.

PARTÍCULAS SOB FORÇA CENTRAL

Considere que uma força F é aplicada sobre uma partícula de massa m com posição definida pelo vetor posição $\vec{r}(x, y, z)$. A energia potencial $V(r)$ neste caso, quando a partícula se move da posição r_1 a posição r_2 , é dada por:

$$V(r) = - \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (1)$$

Uma outra abordagem seria pela utilização do gradiente, que é basicamente um operador que representa a derivada parcial de uma função:

$$\vec{F} = -\text{grad } V = -\vec{\nabla}V, \quad (2)$$

ou seja:

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}. \quad (3)$$

Como é necessário conhecer somente o ponto inicial r_1 e o ponto final r_2 , então podemos dizer que a integral na equação 1 é independente do caminho e, por definição algébrica de um produto vetorial:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}V = -\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}, \quad (4)$$

indicando que o caminho formado pelos pontos r_1 e r_2 formam um caminho fechado.

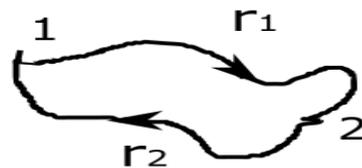


Figura 1: Caminho fechado formado pelas trajetórias r_1 e r_2 entre os pontos 1 e 2.

Assim, podemos definir a energia potencial como:

$$V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2) = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (5)$$

Além disso, aplica-se a conservação da energia para qualquer intervalo de tempo por:

$$E = T_1 + V(\vec{r}_1) = T_2 + V(\vec{r}_2), \quad (6)$$

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + V(x, y, z),$$

onde $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$ é a energia cinética devido ao movimento da partícula.

Uma força F que seja função somente da posição e cujo rotacional seja nulo é dita como uma força conservativa, uma vez que há independência do caminho entre os pontos r_1 e r_2 .

Entre as variações de forças conservativas, as forças centrais são bem abordadas em problemas da Física e Engenharias. A força central é uma força dirigida para um centro fixo O , onde o módulo é uma função da distância entre a partícula e o ponto O :

$$\vec{F} = F(r) \hat{r}$$

$$F_x = \frac{x}{r} F(r), \quad F_y = \frac{y}{r} F(r), \quad F_z = \frac{z}{r} F(r), \quad (7)$$

onde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

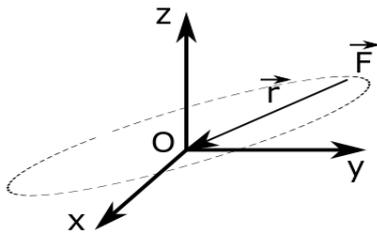


Figura 2: A força central aponta sempre em direção ao centro fixo O .

A força central representa uma atração [$F(r) < 0$] ou repulsão [$F(r) > 0$] no sentido do ponto fixo na origem O , como pode ser visto na Figura 2. Exemplos bem conhecidos de forças centrais são a força gravitacional (Lei gravitacional de Newton) e a força elétrica (Lei de Coulomb). Apesar das forças citadas envolverem duas partículas, é possível considerá-las como forças centrais por meios algébricos do cálculo.

MOMENTO ANGULAR E POTENCIAL EFETIVO

Partindo do conceito das forças centrais, para um corpo rígido que gira em torno de um eixo fixo, o torque $\vec{\tau}$ externo da partícula será nulo:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = (\vec{r} \times \hat{r}) F(r) = \vec{0} \quad (8)$$

e, por consequência, o vetor momento angular \vec{L} é constante, uma vez que:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}. \quad (9)$$

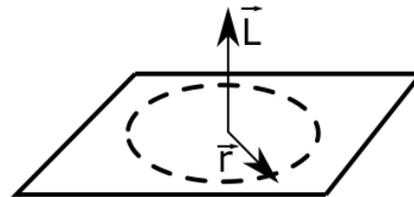


Figura 3: Momento angular \vec{L} perpendicular à trajetória circular de raio \vec{r} .

Em geral, considera-se a posição \vec{r}_0 e a velocidade \vec{v}_0 como conhecidas para o instante inicial t_0 . Escolhendo o eixo x como a direção da posição inicial \vec{r}_0 e o eixo z como perpendicular à velocidade inicial \vec{v}_0 , temos:

$$x_0 = |\vec{r}_0| \quad y_0 = z_0 = 0$$

$$v_{x0} = \vec{v}_0 \hat{x}, \quad v_{y0} = \vec{v}_0 \hat{y}, \quad v_{z0} = 0$$

Portanto, o movimento se mantém no plano xy enquanto o momento angular se mantém fixo e perpendicular ao plano xy . Se considerarmos pelas coordenadas polares r e θ , podemos definir a aceleração \vec{a} do movimento por:

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \hat{\theta}, \quad (10)$$

onde \dot{r} e $\dot{\theta}$ são derivadas do tempo de 1ª ordem, \ddot{r} e $\ddot{\theta}$ são derivadas do tempo de 2ª ordem das coordenadas radial e angular.

Assim, pela 2ª lei de Newton:

$$\vec{F} = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}, \quad (11)$$

e considerando cada componente, temos:

$$\begin{cases} m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = F(r) \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0 \end{cases} \quad (12)$$

Da segunda equação em (12) obtemos:

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = \frac{d}{dt}L = 0 \quad (13)$$

e, portanto: $L = mr^2\dot{\theta} = \text{constante}$, inclusive na origem O . A energia cinética por coordenadas polares é dada por:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2, \quad (14)$$

uma vez que a velocidade no movimento será: $\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$. A energia potencial $V(r)$ será dada por:

$$V(r) - V(r_0) = -\int_0^r F(r) dr \quad (15)$$

Assim, por conservação de energia:

$$\begin{aligned} E &= T + V = \text{constante}, \\ \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + V(r) &= \text{constante}. \end{aligned} \quad (16)$$

Escrevendo a velocidade angular $\dot{\theta}$ em termos do momento angular L , podemos definir a energia total E por:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \\ E &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{eff}(r) \end{aligned} \quad (17)$$

onde $V_{eff}(r)$ é o potencial efetivo dado por:

$$V_{eff}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r). \quad (18)$$

Como a partícula se move ao longo de uma trajetória curvilínea de distância s , a área varrida pela variação da distância ds (conforme mostrado na Figura 4) pode ser relacionado com a variação angular $d\theta$ por meio da equação:

$$ds = \frac{1}{2}r^2 d\theta. \quad (19)$$

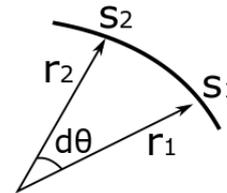


Figura 4: Variação angular $d\theta$ entre as distâncias s_1 e s_2 .

A taxa de variação com o tempo aplicada a equação 19 resulta em:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \dot{\theta} = \frac{L}{2m} = \text{constante} \quad (20)$$

e, portanto, nota-se que a área é varrida a intervalos de tempo iguais.

CASO ESPECIAL: ÓRBITAS CÔNICAS

Vamos considerar que a força central é inversamente proporcional ao quadrado da distância. Assim, a força central e a energia potencial são dadas por:

$$\vec{F} = \frac{k}{r^2}\hat{r} \quad V(r) = \frac{k}{r}, \quad (21)$$

onde o ponto de partida é considerado do infinito e k é uma constante definida pela particularidade estudada ($k = -Gm_1m_2$ para estudo gravitacional ou $k = q_1q_2$ para estudo elétrico, por exemplo).

O potencial efetivo $V_{eff}(r)$ será dado por:

$$V_{eff}(r) = \frac{k}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}. \quad (22)$$

Se a força é repulsiva ($k > 0$), não haverá movimento periódico em \vec{r} e a partícula vem do infinito. O ponto de retorno ocorre para valores maiores de r em comparação para quando $k = 0$, onde as órbitas tornam-se linhas retas. Se a força é atrativa ($k < 0$) com o momento angular não-nulo, o ponto de retorno ocorre para valores menores de r em comparação a $k = 0$. Assim, quando $E = -1/2 k^2 (m/L^2)$, a partícula se move em um círculo de raio $r_0 = L^2/(-km)$, tornando-se uma órbita como curva fechada.

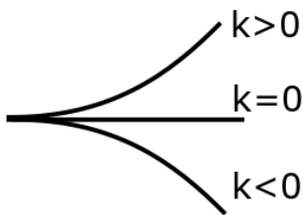


Figura 5: Constante k para diferentes forças centrais.

Considerando $u = 1/r$, obtém-se a relação:

$$\frac{d^2 u}{d \theta^2} + u = -\frac{mk}{L^2} \quad (23)$$

onde a sua parte homogênea gera a solução:

$$u = A \cos(\theta - \theta_0) \quad (24)$$

com A sendo uma constante. Para a parte não homogênea, considera-se $u = -(mk)/L^2$ e como solução geral temos:

$$u = -\frac{mk}{L^2} + A \cos(\theta - \theta_0). \quad (25)$$

A equação (25) trata-se de uma equação para seções cônicas em $r = 0$, onde constante A será dada por:

$$A^2 = \frac{m^2 k^2}{L^4} + \frac{2mE}{L^2}. \quad (26)$$

A órbita é, então, determinada por condições iniciais.

As três formas cônicas (elipse, hipérbole e parábola) podem ser descritas pela forma padrão:

$$\frac{1}{r} = B + A \cos \theta \quad (27)$$

onde A é positivo e as constantes A e B são dadas por:

$$B > A \text{ (Elipse): } B = \frac{1}{a(1-\varepsilon^2)} \quad A = \frac{\varepsilon}{a(1-\varepsilon^2)},$$

onde a é o semieixo maior da elipse e ε a sua extremidade.

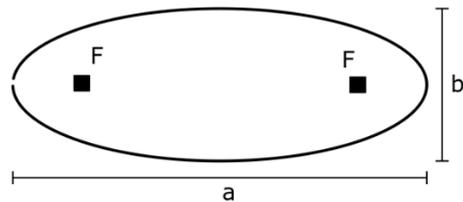


Figura 6: Representação de uma elipse com semieixo maior a e semieixo menor b .

$$B = A \text{ (Parábola): } A = B = \frac{1}{a},$$

onde a é a distância do foco a diretriz d da parábola.

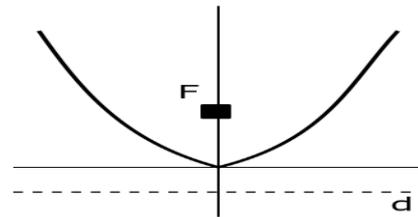


Figura 7: Representação de uma parábola e sua diretriz d .

$$0 < B < A \text{ (Hipérbole Ramo +):}$$

$$B = \frac{1}{a(\varepsilon^2-1)} \quad A = \frac{\varepsilon}{a(\varepsilon^2-1)}$$

$$-A < B < 0 \text{ (Hipérbole Ramo -):}$$

$$B = \frac{-1}{a(\varepsilon^2-1)} \quad A = \frac{\varepsilon}{a(\varepsilon^2-1)}$$

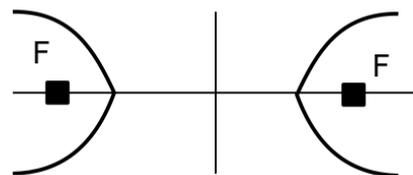


Figura 8: Representação de uma hipérbole.

É interessante notar que em todos os casos abordados:

$$\varepsilon = \frac{A}{|B|} \quad (28)$$

Deste modo, com algum arranjo matemático obtém-se as constantes A e B por:

$$A = \sqrt{B^2 + \frac{2mE}{L^2}} \quad B = -\frac{mk}{L^2} \quad (29)$$

e a excentricidade ε por:

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}} \quad (30)$$

APLICAÇÕES

Os engenheiros mecânicos reduzem significativamente o tempo e os gastos associados a construção de equipamentos e máquinas aplicando princípios da Matemática e da Física. Esses conhecimentos são aplicados na elaboração dos projetos e norteiam a construção de dispositivos eficientes, sem a necessidade de testes caros e demorados^{3,5}.

Ao analisar as forças que atuam sobre estruturas e máquinas, o engenheiro se depara frequentemente com as forças centrais. Equipamentos de transmissão de potência, em geral dependem de elementos como rolamentos, eixos e engrenagens. O estudo de equipamentos mecânicos compostos por esses elementos, passa, primordialmente, pelo estudo das forças centrais⁵.

Os mais recentes avanços no desenvolvimento de máquinas biológicas são frutos dos conhecimentos básicos de rotação e forças centrais. Apesar das inúmeras particularidades das máquinas biológicas, as teorias físicas forneceram temas unificadores e determinantes à compreensão do funcionamento interno dessas máquinas em nanoescala. De um modo geral, máquinas biológicas são seres vivos que, modificados geneticamente, se tornam capazes de produzir material de interesse humano. Se encaixam nessa categoria todo e qualquer ser vivo que

utilize conceitos de engenharia em seu funcionamento, como é o caso dos circuitos biológicos e máquinas moleculares alimentadas por energia química⁶.

Vale lembrar que os detalhes do comportamento molecular podem ser investigados por meio de simulações que utilizam algoritmos baseados em descrições físicas que lançam mão, também, dos conhecimentos acerca da rotação dos corpos. Isto porque toda matéria que existe no universo é composta por átomos, que por sua vez, são feitos de nêutrons, prótons e elétrons. Os elétrons, apesar da natureza ondulatória, descrevem uma trajetória teoricamente circular em torno dos núcleos, o que lhe confere momento angular orbital. O princípio da dualidade onda partícula é utilizado para descrever o comportamento ora ondulatório, ora corpuscular dos elétrons. Na física quântica o entendimento não é tão direto, pois as órbitas eletrônicas foram substituídas por densidades de probabilidade, mas é consenso que cada estado de um elétron em um átomo possui um momento angular. Os elétrons ocupam orbitais atômicos de energia definida, ou seja, existem apenas em estados de energia quantizados, com energias bem definidas^{7,8,9}.

As interações eletrostáticas entre os átomos que formam a matéria são forças centrais. Estudos de astronomia e relatividade lançam mão da física das rotações, tendo em vista que muitos corpos celestes percorrem orbitas circulares¹⁰. Em constante expansão, o universo mantém uma associação bem orquestrada de movimentos translacionais e rotacionais dos corpos celestes. Dispositivos geradores de imagens médicas são construídos a partir de estudos feitos com algoritmos baseados em otimização de força central (Central Force Optimization – CFO)¹¹. Esse algoritmo tem sido usado em várias aplicações concernentes ao comportamento atômico e molecular¹².

CONCLUSÕES

A distribuição de forças sobre um elemento é fator determinante para o desenvolvimento do projeto de qualquer equipamento mecânico. A distribuição de

velocidades, o atrito entre a peças, o calor produzido, a utilização de fluidos, todos esses fatores, e vários outros, se baseiam nas ideias da física e são importantes fatores a serem considerados pelo engenheiro ao projetar. Da mesma forma, o estudo das propriedades de rotação dos corpos e das forças centrais é parte fundamental da formação do engenheiro mecânico.

Uma boa formação representa respeitabilidade e lugar de destaque no mercado, que por sua vez, são condições essenciais para o sucesso na carreira profissional.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. NUSSENZVEIG, H.M. **Curso de Física Básica**. v. 1. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 1a ed., 9ª reimpressão, 2011.
2. J. B. Marion, S. T. Thornton, **Classical Dynamics of Particles and Systems**, Third Ed. (Harcourt Brace Jovanovich, Orlando, FL, 1988).
3. K. R. Symon, **Mecânica**, (Editora Campus, RJ, 1982).
4. H. Goldstein, C. P. Poole e J. Safko, **Classical Mechanics** - 3a. ed., Prentice Hall / 2002.
5. Wickert, J. **Introdução à Engenharia Mecânica**. São Paulo: Cengage Learning, 2007.
6. Mugnai, M. L. Theoretical perspectives on biological machines. **Reviews of Modern Physics**, Vol. 92, 2020.
7. MARX, D. e HUTTER, J. **Ab Initio Molecular Dynamics: Basic Theory And Advanced Methods**. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
8. Halliday, D., Resnick, D., Walker, J. **Fundamentos de física, vol. 4: óptica e física moderna**, 10. Ed. Rio de Janeiro: LTC, 2018.
9. Kubo, S., Niina, T., Takada, S. Molecular dynamics simulation of proton-transfer coupled rotations in ATP synthase FO motor. **Scientific Reports**, vol. 10, n. 8225, 2020.
10. GUIDI ITOKAZU, A. A Força que Move os Planetas: Da Noção de *Species Immaterialiata* na Astronomia de Johannes Kepler. **Cad. Hist. Fil. Ci.**, Campinas, Série 3, v. 16, n. 2, p. 211-231, 2006.
11. El-Hoseny, H.M. An Efficient DT-CWT Medical Image Fusion System Based on Modified Central Force Optimization and Histogram Matching. **Infrared Physics & Technology**. Vol. 94, p. 223-231, 2018.
12. Qian, W., Wang, B., Feng, Z. Adaptive Central Force Optimization Algorithm Based on the Stability Analysis. **Mathematical Problems in Engineering**. Vol. 6, 2015.